Capítulo 4

Potencial Eletrostático

4.1 Introdução

A utilização do campo elétrico, como visto no capítulo anterior, para resolução de problemas pode ser bastante complexa, principalmente devido ao fato de o campo elétrico ser um campo vetorial. Dessa forma, o potencial elétrico entra como uma excelente forma de simplificar os cálculos a serem realizados e possibilitar a resolução de problemas ainda mais omplexos de eletrostática.

Inicialmente, porém, relembremos alguns conceitos básicos:

4.1.1 Recordação da Mecânica

Sendo P1 e P2 pontos e c um caminho que liga P1 a P2. O trabalho realizado por uma força ao longo deste caminho de P1 a P2 é:

$$W^{(c)}_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1(\mathrm{c})}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Dessa forma, pelo teorema do trabalho-energia cinética temos:

$$\Delta T = W^{(c)}_{P_1 \to P_2}$$

$$T_2 - T_1 = W^{(c)}_{P_1 \to P_2}$$

Ou seja, o trabalho é igual à variação da energia cinética entre os pontos. Assim temos que, se a força $\vec{F}$ for conservativa, pela conservação da energia mecânica temos:

$$\Delta V + \Delta T = c^{te} = \Delta E_{mec} = 0$$

$$W_{P_1 \to P_2} = -\Delta U$$

$$\Delta U = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Que só depende dos pontos inicial e final.

4.2 Definição do Potencial eletrostático

Logo, assim como associamos à força Peso um campo escalar U da energia potencial gravitacional, podemos associar à força eletrostática um campo escalar V, pois esse se trata também de um campo conservativo, da seguinte forma:

$$W = \int_{A}^{B} \vec{F}_{ele} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta U = -\int_{A}^{B} q\vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4.1}$$

O que nos leva à

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} = - - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{4.2}$$

Ou seja

$$\text{Potencial} = \frac{\text{EnergiaPotencialEletrostatica}}{\text{carga}}$$

Porém a escolha do nível o qual o potêncial é nulo é arbitrário, sendo normalmente escolhido o infinito, assim, é conveniente escolher $V(\infty) = 0$.

Exemplo:

4.2.1 Cálculo do pontencial eletrostático gerado por uma carga pontual q

Sabe-se que:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Logo:

$$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Então, estabelecendo $r_1 \to \infty$ e $V(\infty) = 0$ temos que:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

4.3 Cálculo do Campo a partir do potencial

Como vimos, definimos o potencial eletrostático através do campo elétrico, mas, dado o potencial é possível obter o campo elétrico?

A resposta é sim, da seguinte forma:

Sabe-se pelo teorema do gradiente que:

$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$

Mas:

$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Logo, como a igualdade é verdadeira para quaisquer pontos P_1 e P_2, temos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{4.3}$$

que nos dá o vetor campo elétrico a partir do campo escalar V. Vale notar que isso só é possível devido ao fato de o campo elétrico ser conservativo.

4.3.1 Equipontenciais

Nesse momento, faz-se necessário introduzir o conceito de equipontenciais. Basicamente, as equipotenciais são regiões com o mesmo potencial eletrostático. Além disso, deve-se notar que a equação $dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ implica que, se $\vec{E} \perp d\vec{l}$:

$$dV = 0 \Rightarrow V = cte$$

Logo, as equipotenciais são perpendiculares ao campo.

4.4 Potencial de uma distribuição de cargas

O cálculo do potencial é, muitas vezes, menos trabalhoso que o cálculo do campo elétrico. Dessa forma, veremos a seguir diversas formas de calcular o potencial elétrostático e alguns exemplos de aplicação. Sempre lembrando que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

Sabe-se, como o princípio da superposição é válido para o campo elétrico, o mesmo acontece para o campo eletrostático, assim temos que:

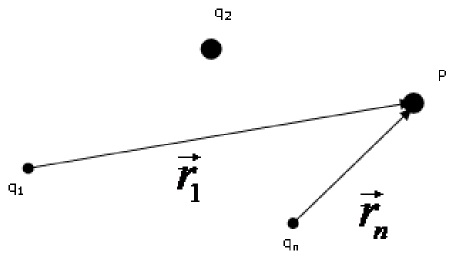

Figura 4.1: Esquema

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Logo:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \tag{4.4}$$

Que, Para uma distribuição:

Volumétrica: $dq = \rho dv$

Superficial: $dq = \sigma dS$

Linear: $dq = \lambda dl$

Agora, vejamos alguns exemplos de aplicação:

4.4.1 Anel isolante uniformemente carregado

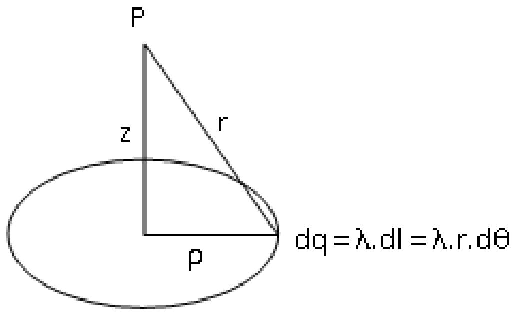

Figura 4.2: Anel isolante carregado com densidade linear λ

Assim:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\rho d\theta}{\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Assim, como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, então:

$$\vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$$

4.4.2 Disco uniformemente carregado: a uma distância z do centro

Como $dq = \sigma ds = \sigma r' dr' d\theta$ e $r = (\mathrm{z}^2 + r'^2)^{1/2}$ então:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{\sigma r' dr' d\theta}{(z^2+r'^2)^{1/2}} = \frac{\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R}\frac{2r' dr'}{(z^2+r'^2)^{1/2}}$$

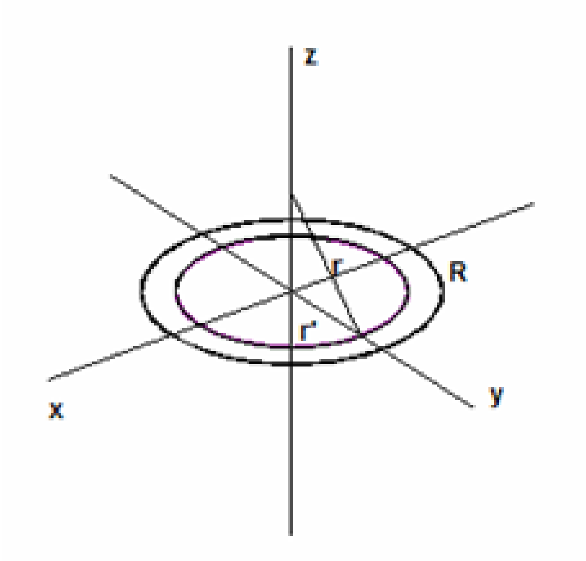

Figura 4.3: disco isolante carregado com densidade superficial σ

$$V = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[2(z^2 + r'^2)^{1/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+R^2} - |z|\right]$$

Vale notar que, se $\lim |z| >> R$ então:

$$\sqrt{z^2+R^2} = |z|\left(1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right)^{1/2} = |z|\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+...\right)$$

Logo:

$$V \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{z\,|z|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|z|}$$

Ou seja, caso observemos o disco de muito longe, ele irá se comportar cada vez mais com uma carga pontual. Além disso podemos obter $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z}V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]$$

Desse exemplo nós podemos tirar algumas conclusões:

⇒ Normalmente é mais difícil achar o potencial em outros pontos fora do eixo de simetria, pois a integral não é tão simples apesar de bem conhecida e tabelada (integrais elípticas).

⇒ O campo, assim como o potêncial, pode ser difícil de calcular caso não haja simetria. Além disso, ambos o potencial e o campo elétrico se aproximam daqueles gerados por cargas pontuais com o aumento da distância.

Calculemos agora o exemplo do potencial no bordo do disco:

4.4.3 Disco uniformemente carregado: Cálculo no Bordo

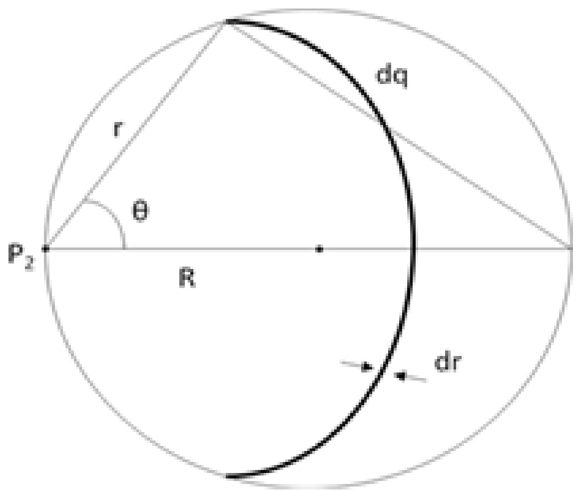

Figura 4.4: disco isolante carregado com densidade superficial σ

Assim:

$$dq = \sigma r(2\theta)dr$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\sigma(2\theta)dr$$

Porém, pela geometria do triângulo:

$$r = 2R\cos\theta$$

$$dr = -2Rsen\theta d\theta$$

Logo:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\pi/2}^{0}\sigma 2\theta(-2Rsen\theta)d\theta = \frac{R\sigma}{\pi\varepsilon_0}\int\limits_{0}^{\pi/2}\theta sen\theta d\theta = \frac{R\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[sen\theta - \theta\cos\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$V_{borda} = \frac{R\sigma}{\pi\varepsilon_0}$$

4.4.4 Casca esférica

Temos:

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$$

$$dq = \sigma ds = \sigma R^2 sen\theta d\theta d\phi$$

Assim:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sigma R^2 sen\theta d\theta d\phi}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}}$$

$$V(z) = \frac{2\pi\sigma R^2 2}{4\pi\varepsilon_0 2zR}\left[(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}\right]_0^{\pi}$$

$$V\left(z\right) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 2z}\left[\sqrt{z^2+R^2+2zR} - \sqrt{z^2+R^2-2zR}\right] = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 2z}\left[\sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2}\right]$$

$$\text{se} z > R \Rightarrow z-R > 0 \Rightarrow \sqrt{(z-R)^2} = z-R \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 z}$$

$$\text{se} z < R \Rightarrow z{-}R < 0 \Rightarrow \sqrt{(z-R)^2} = -(z{-}R) \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 z}\left[z+R-(R-z)\right] = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

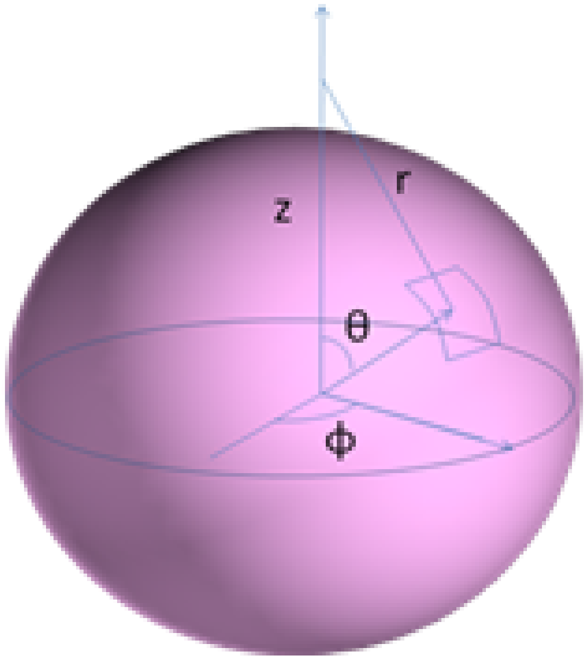

Figura 4.5: disco isolante carregado com densidade superficial σ

O potencial dentro da esfera é constante. Assim temos:

$$V(z) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_o z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z}, r > R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}, r < R \end{cases} \text{ e } E(z) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}, r > R \\ 0, r < R \end{cases}$$

Podemos então, construir os gráficos de E e V em função de r obtendo assim:

4.5 Dipolo elétrico e expansão multipolar dos campos elétricos

Por definição, um dipolo elétrico está relacionado com o potencial elétrico gerado por um sistema de duas cargas.

Exemplo: Encontre o potencial elétrico em um ponto arbitrário no eixo x.

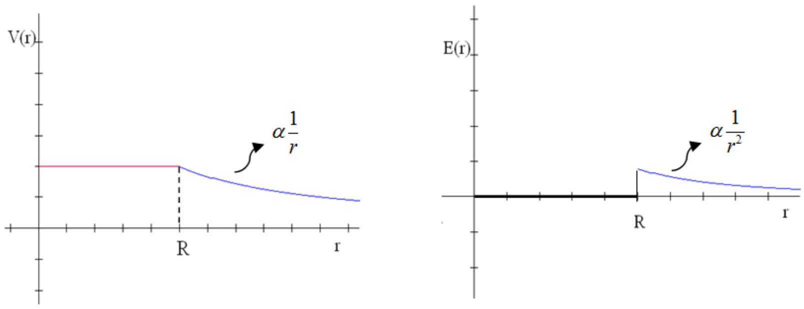

Figura 4.6: gráfico de E e V por r

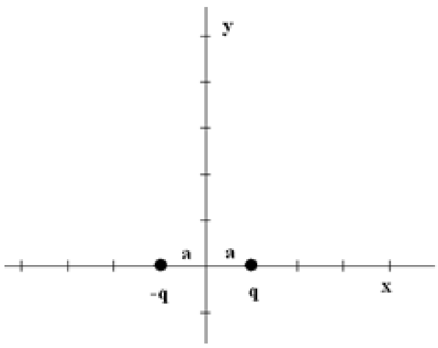

Figura 4.7: Esquema

Assim:

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{|x-a|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|x-a|} - \frac{1}{|x-a|}\right]$$

Que, sendo $V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$ então:

$$\frac{V(x)}{V_0} = \frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|} - \frac{1}{\left|\frac{x}{a}-1\right|}$$

Assim pode-se construir o gráfico:

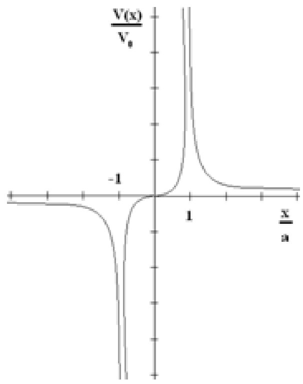

Figura 4.8: Gráfico de V/V_0 em função de x

Que diverge no local onde as cargas se encontram.

Agora, iremos analisar o caso anterior, mas com a posição de referência sendo em qualquer ponto do plano. Assim temos:

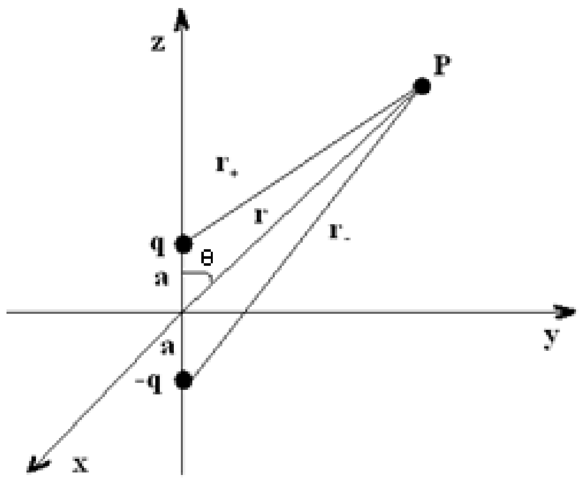

Figura 4.9: Esquema

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]$$

Mas $r_{\pm}^2 = r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta$. Considerando uma posição na qual $r >> a$

temos:

$$\frac{1}{r_\pm} = \left(r^2 + a^2 \mp 2ra\cos\theta\right)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 + \underbrace{\left(\frac{a}{r}\right)^2 \mp 2\frac{a}{r}\cos\theta}_{x}\right)^{-1/2}$$

mas se $x << 1$ então $(1+x)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$, e como $\frac{a}{r} << 1$ então:

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \pm \frac{a}{r}\cos\theta\right)$$

Logo:

$$V \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{a}{r}\cos\theta - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \frac{a}{r}\cos\theta\right] \approx \frac{q2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Na qual $\vec{p} = 2aq\hat{k}$ é o momento dipolo elétrico.

Vale notar também que V cai com r^2 e não com r, o que é razoável, que V decresça mais rápido que o potencial de uma única carga, pois conforme estamos mais e mais longe do dipolo, este parece mais e mais com uma pequena unidade de carga zero.

Calculando o campo, sabendo que o gradiente em coordenadas esféricas é dado por:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$$

Então:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = +\frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}, E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = +\frac{1}{r}\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = +\frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\hat{\theta}$$

A seguir faremos uma análise mais aprofundada do assunto, aplicando o mesmo raciocínio anterior, poderemos deduzir que:

Em monopolo V cai com $1/r$

Em um dipolo V cai com $1/r^2$

Em um quadripolo V cai com $1/r^3$

E assim sucessivamente...

Consideremos agora uma distribuição de cargas na vizinhança na origem do sistema de coordenadas, finita, e pode ser totalmente encenada por uma esfera de raio a que é pequeno comparado à distância até o ponto de observação. Assim temos que:

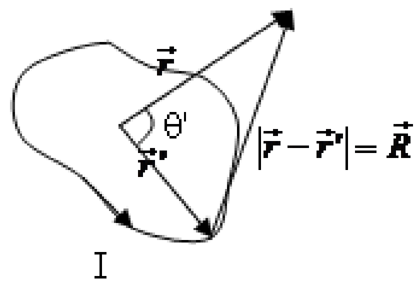

Figura 4.10: Esquema

Na qual $\rho = \rho(r')$. Logo:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

Mas,se $r >> r'$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} = (r^2 - 2\vec{r}.\vec{r}' + r'^2)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left(-2\frac{\vec{r}.\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)\right) \approx \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{Potencialdemonopolo}} + \underbrace{\frac{\vec{r}.\vec{r}'}{r^3}}_{\text{Potencialdedipolo,sendo}\vec{p}=\vec{r}'q\to\frac{\vec{p}.\hat{r}}{r^2}} + ...$$

Logo, O potencial devido à uma distribuição de carga arbitrária pode sempre ser expresso em termos de uma expansão de multipólos. Assim, pela Lei dos Cossenos:

$$\left(\underbrace{|\vec{r}'-\vec{r}|}_{\text{r}}\right)^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'$$

Note que foram definidos duas distâncias, uma r e outra r não se confunda!

$$\mathrm{r}^2 = r^2\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta'\right)$$

$$\mathrm{r} = r\left(1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta'\right)^{1/2}$$

$$\mathrm{r} = r\,(1+\in)^{1/2},\ \in = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r}\cos\theta'$$

Logo:

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{r}(1+\in)^{-1/2} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\in + \frac{3}{8}\in^2 - \frac{5}{16}\in^3 + ...\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{r'}{r}\cos\theta' + \frac{3}{8}\left(\frac{r'}{r}\right)^4 + \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2\cos^2\theta' - \frac{3}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^3\cos\theta' + ...\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 + \frac{r'}{r}\cos\theta' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{(3\cos^2\theta' - 1)}{2} + ...\right]$$

Que, utilizando então os polinômios de Legendre:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^l \left(x^2 - 1\right)^l$$

Podemos escrever:

$$\frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\theta'\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

Logo:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(r')dv'}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\cos\theta'\right)\left(\frac{r'}{r}\right)^n$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int \left(r'\right)^n P_n\left(\cos\theta'\right)\rho(r')dv'$$

Note que temos agora a expansão multipolar do potencial em termos de $1/r$, na qual: n = 0, contribuição de monopólo

n = 1, dipolo

n = 2, quadrupolo

Com o menor termo não nulo da expansão nos dá aproximadamente o potencial a grandes distâncias, e os termos sucessivos aumentam a precisão do resultado.

Nota-se também que o termo de dipolo é dado por:

$$V_{dip} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot \underbrace{\int \vec{r}'\rho\left(r'\right)dr'}_{\substack{\vec{p}=\mathrm{momentode}\\ \mathrm{dipolodadistribuicao}}}$$

pois $r' \cos\theta = \vec{r'} \cdot \hat{r}$

4.6 Circulação do campo elétrico

Como visto no capítulo zero sabemos que:

$$\oint_{\Gamma_i} \vec{c}.d\vec{l} = \left(\vec{\nabla}\text{x}\vec{c}\right).\hat{n}\Delta\text{S}$$

Onde $\vec{c}$ é um campo vetorial qualquer.

Dessa forma, como sabemos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}.d\vec{l} = 0, \forall\Gamma$$

Então:

$$\int_{S} \left(\vec{\nabla}\text{x}\vec{E}\right).d\vec{s} = 0, \forall S$$

$$\vec{\nabla}\text{x}\vec{E} = 0$$

Essa equação resume basicamente toda a eletrostática, visto que, ela mostra que o campo elétrico é conservativo (na eletrostática) e permite que o campo elétrico seja o gradiente de uma função potencial, visto que $\vec{\nabla}\text{x}\vec{\nabla}V = 0$ (o rotacional de um gradiente é sempre nulo).